IuM-Brückenkurs Mathematik

K. Viertel

Fachbereich IuM
Hochschule Bielefeld

WS 2025/26

Themenbereich

Elementare Geometrie

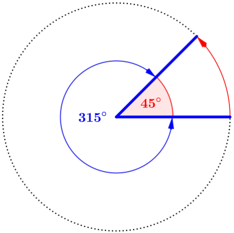
Elementare Geometrie

Einige Grundbegriffe

- **Punkt**: Anschaulich ein Objekt ohne jede Ausdehnung.
- **Strecke**: Ein gerade Linie zwischen zwei Punkten.Satzgruppe des Pythagoras
- **Gerade**: Eine gerade, *unendlich* lange und in *beide Richtungen* unbegrenzte Linie.
- **Halbgerade**: Eine Gerade, die in eine Richtung begrenzt ist (z.B. durch einen Punkt)
- **Strahl**: Eine orientierte Halbgerade. D.h., sie hat einen Anfangspunkt
- **Scheitel**: Der gemeinsame Anfangspunkt von zwei Strahlen.
- **Winkel**: *Ein Teil der Ebene*, der durch ein Strahlenpaar oder Halbgeradenpaar zusammen mit dem Scheitel begrenzt wird.

Ein Winkelmaß dient zur Angabe (Quantifizierung) der Winkelweite eines Winkels in der Ebene. Betrachtet man Winkel als Drehung, so soll der Vollwinkel der *kleinste* Winkel sein, bei dem ein Strahl um seinen Ursprung gedreht wieder seine Ausgangsrichtung erreicht.

Gradmaß: Der Vollwinkel wird in 360 *gleich große* Teile zerlegt. Jedes Teil nennt man ein Grad (1°). Dann entsprechen einem Vollwinkel genau 360°, einem Achtel Vollwinkel entsprechend 45°, usw.

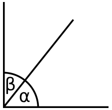


Zur Benennung von Winkeln nimmt man häufig die griechische Buchstaben α, β, γ, usw.

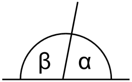
Elementare Geometrie

Einige spezielle Winkelpaare

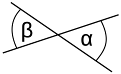
Zwei Winkel heißen **Komplementwinkel** oder Komplementärwinkel, wenn sie sich zu 90° ergänzen: $\alpha + \beta = 90^\circ$



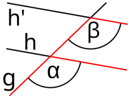
Zwei Winkel heißen **Ergänzungswinkel**, wenn sie sich zu 180° ergänzen: $\alpha + \beta = 180^\circ$



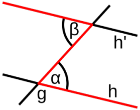
Schneiden sich zwei Geraden, so bezeichnet man das Paar gegenüberliegender Winkel als **Gegenwinkel**. Sie sind immer gleich groß: $\alpha = \beta$.

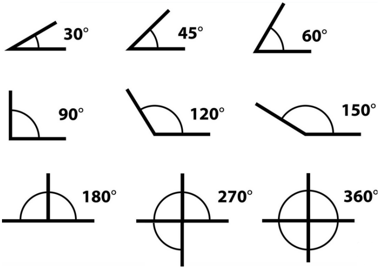


Schneidet eine Gerade g zwei Geraden h und h', so sind diese *genau dann* parallel, wenn die Winkel α und β, die auf derselben Seite von g und auf einander entsprechenden Seiten liegen, gleich sind. Sie heißen **Stufenwinkel**.



Die Geraden h und h' sind *genau dann* parallel, wenn α und β auf unterschiedlichen Seiten von g und entgegengesetzt liegend gleich sind. Man nennt sie **Wechselwinkel**.



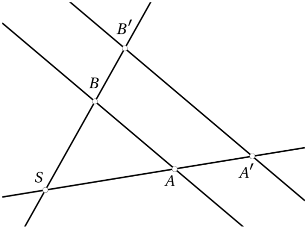


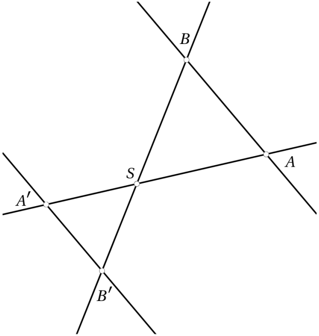
Bezeichnung	Im Gradmaß
Nullwinkel	$\alpha = 0^\circ$
Spitzer Winkel	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$
Rechter Winkel	$\alpha = 90^\circ$
Stumpfer Winkel	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
Gestreckter Winkel	$\alpha = 180^\circ$
Überstumpfer Winkel	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$

Die Geraden AA' und BB' treffen sich im Punkt S, der entweder auf beiden (Bild rechts) oder auf keiner der beiden Strecken $|AA'|$ und $|BB'|$ (Bild links) liegt. In dieser Situation gelten die folgende zwei Aussagen:

Erster und zweiter Strahlensatz

Sind AB und $A'B'$ parallel, dann gilt $|SB'| : |SB| = |SA'| : |SA|$ und $|SA| : |AB| = |SA'| : |A'B'|$.





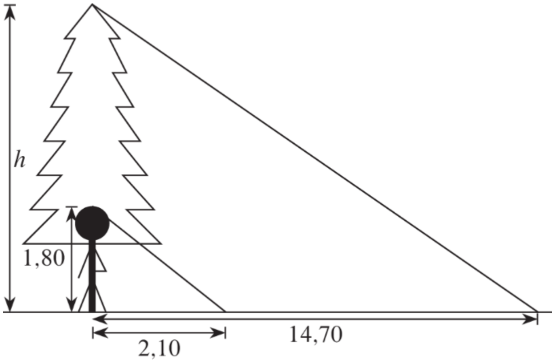


Figure: Eine 1,8m große Person wirft einen 2,1m langen Schatten. Sie steht direkt neben einem Baum, der einen 14,7m langen Schatten wirft. Wie hoch ist der Baum?

Rechenweg: Der erste Strahlensatz liefert

$$\frac{1{,}8}{h} = \frac{2{,}1}{14{,}7} \iff x = 12{,}6.$$

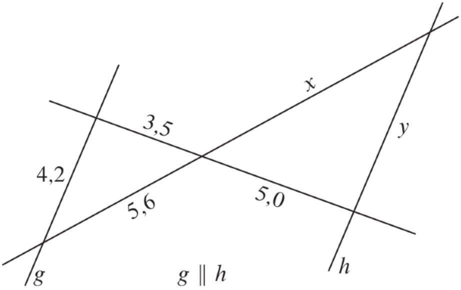


Figure: Berechnen Sie die Strecken x und y.

Rechenweg: Erster Strahlensatz:

$$\frac{3{,}5}{5} = \frac{5{,}6}{x} \Leftrightarrow x = 8.$$

Zweiter Strahlensatz:

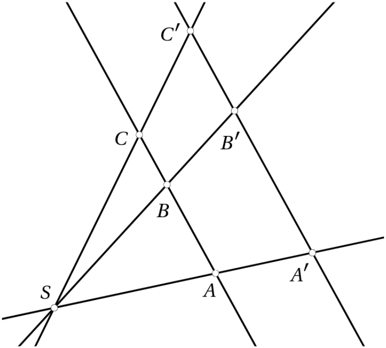
$$\frac{3{,}5}{4{,}2} = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y = 6.$$

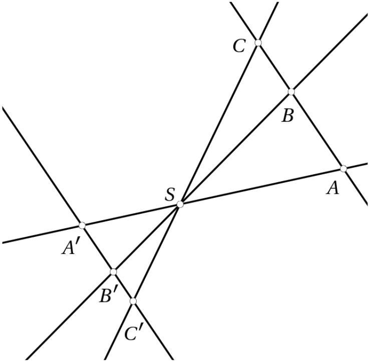
Elementare Geometrie

Drei Geraden schneiden sich im Punkt S und werden selbst von zwei Geraden in den Punkten A, B, C und A', B', C' geschnitten. Der Punkt S liegt entweder auf den Strecken $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ oder außerhalb. Dann gilt

Dritter Strahlensatz

Sind AB und $A'B'$ parallel, dann gilt $|AB| : |BC| = |A'B'| : |B'C'|$





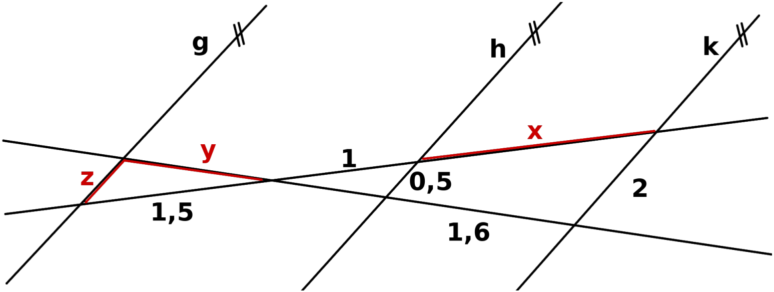


Figure: Berechne alle fehlenden Strecken.

Rechenweg: Zweiter Strahlensatz:

$$\frac{1+x}{2} = \frac{1}{0{,}5},$$

also $x = 3$. Und $\frac{1+x}{2} = \frac{1{,}5}{z}$ und damit $z = 0{,}75$. Aufgabe für die Teilnehmer: Wie lautet y?

Ein **Dreieck** ist die einfachste, von geraden Linien begrenzte Figur der Ebene. Seine Linien nennt man **Seiten**, die drei Winkel im Inneren die **Innenwinkel** und die Scheitel werden die **Eckpunkte** des Dreiecks genannt. Die Summe aller Innenwinkel ist 180°.

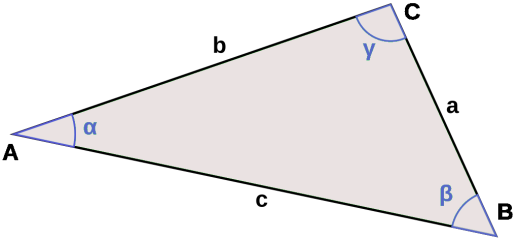


Figure: Ein allgemeines Dreieck ABC

Man unterteilt Dreiecke nach Seitenlängen in *gleichschenklige* ($a = b$), *gleichseitige* ($a = b = c$) und *unregelmäßige* Dreiecke (wie das obige). Bei der Einteilung nach Winkeln ist das *rechtwinklige* Dreieck für uns das wichtigste.

Merkwürdige Punkte im Dreieck

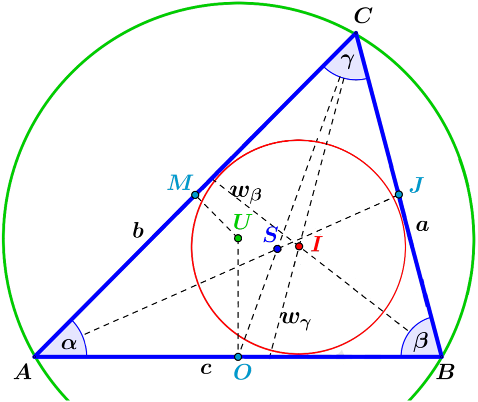


Figure: Der Mittelpunkt des Umkreises U (grün) bildet sich aus den zwei Mittelsenkrechten OU und MU. Der Inkreismittelpunkt I (rot) entsteht durch je zwei der Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ. Der Schwerpunkt S (dunkelblau) mittels der zwei Seitenhalbierenden AJ und CO.

Ist einer der Innenwinkel eines Dreiecks ein rechter Winkel, so wird das Dreieck rechtwinklig genannt. Die Seiten a und b heißen dann die **Katheten**, die Seite c die **Hypotenuse**.

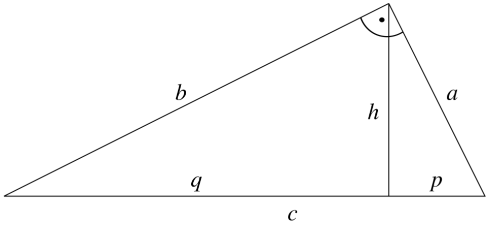
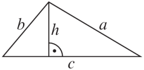
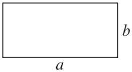
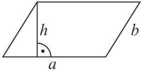
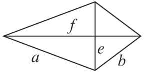
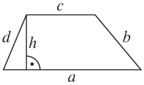
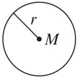


Figure: Rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$ und der Höhe h auf der Seite c, die in die Teilstrecken p und q aufgeteilt ist ($p + q = c$).

$$\boxed{\begin{array}{rl} a^2 + b^2 = c^2 & \text{(Satz des Pythagoras)} \\ a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q & \text{(Kathensatz von Euklid)} \\ h^2 = p \cdot q & \text{(Höhensatz von Euklid)} \end{array}}$$

Elementare Geometrie

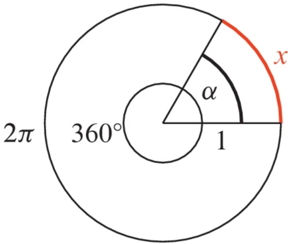
Flächeninhalt und Umfang

Figur	**Flächeninhalt**	**Umfang**
Dreieck 	$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$	$U = a + b + c$
Rechteck 	$A = a \cdot b$	$U = 2 \cdot (a + b)$
Parallelogramm 	$A = a \cdot h$	$U = 2 \cdot (a + b)$
Drachen 	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	$U = 2 \cdot (a + b)$
Trapez 	$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$	$U = a + b + c + d$
Kreis 	$A = \pi \cdot r^2$	$U = 2\pi \cdot r$

Der griechische Buchstabe π (sprich: Pi) steht üblicherweise für eine Konstante, die das Verhältnis des Umfangs U eines Kreises zu seinem Durchmesser angibt.

$$U = 2\pi \cdot r\,, \quad 2r \propto U\,.$$

Diese Proportionalitätskonstante ist für alle Kreise gleich. Der Kreis mit dem Durchmesser 1 hat damit exakt den Umfang π. Oder: Das Bogenmaß eines Winkels α ist die zum Winkel gehörende Bogenlänge x im Einheitskreis.



Die dezimale Darstellung der Kreiszahl beträgt

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\ldots\,,$$

wobei man für unsere Zwecke mit der Näherung 3,14 auskommt.

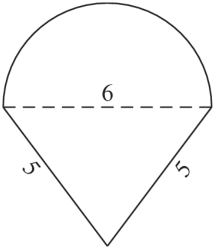


Figure: Berechne Fläche und Umfang dieser Figur.

Rechenweg: Die Figur besteht aus einem gleichschenkligen Dreieck und einem Halbkreis. Die Halbkreisfläche ist $A_{HK} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{9}{2}\pi$ und die Dreiecksfläche

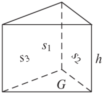
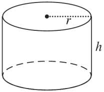
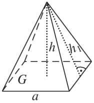
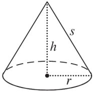
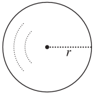
$$A_D = 2 \cdot \frac{3 \cdot h}{2} = 3 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2} = 12.$$

Die Figur hat also die Fläche $A = A_D + A_{HK} = 12 + \frac{9}{2}\pi \approx 26{,}1$. Der Umfang ist

$$U = 2 \cdot 5 + 3\pi \approx 19{,}4.$$

Elementare Geometrie

Volumen und Oberfläche

Köper		Volumen	Oberfläche
Senkrechtes Prisma mit Grundfläche G und Seitenflächen s_k		$V = G \cdot h$	$O = 2G + s_1 + s_2 + \dots s_n$
Drehzylinder		$V = \pi r^2 \cdot h$	$O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
Senkrechte Pyramide mit Grundfläche G, n Seiten der Länge a, Höhe h der Pyramide sowie Höhe h_1 der Seitenflächen		$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	$O = G + n \cdot \frac{1}{2} a h_1$
Drehkegel		$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$	$O = \pi r^2 + M$ mit der Mantelfläche $M = \pi \cdot r \cdot s$
Kugel		$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$	$O = 4\pi \cdot r^2$

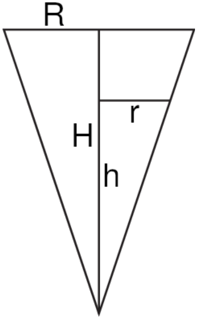


Figure: Man nehme einen Drehkegel der Höhe $H = 24$cm mit Durchmesser 12cm. Wie groß ist das Volumen des Kegels? Was ist die Füllhöhe für eine Füllmenge von 500 cm^3?

Rechenweg: Das Volumen in cm^3 ist

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 288\pi \approx 905.$$

Für die Füllhöhe sucht man die Größen r und h. Die Nebenbedingung ist $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 500$. Mit dem zweiten Strahlensatz bekommt man

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R} = 4,$$

d.h. $r = \frac{1}{4}h$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\frac{1500}{\pi} = r^2 h = \frac{1}{16}h^3 \quad \text{d.h.} \quad h = \sqrt[3]{\frac{24000}{\pi}} \approx 19{,}7$$

Das Füllgut steht damit bis $H - h = 4{,}3$cm unter dem Rand.