

IuM-Brückenkurs Mathematik

K. Viertel

Fachbereich IuM
Hochschule Bielefeld

WS 2025/26

Themenbereich

Naive Mengenlehre

Die Mengenlehre wurde von Georg Cantor (1845–1918) in den Jahren 1874 bis 1897 begründet.

»Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.«

– Georg Cantor

Man schreibt

$$M = \{-1; 0; 2\}, \quad N = \left\{ a; B; c; \frac{3}{4} \right\}$$

Allgemein gilt

- Mengen werden mit geschweiften Klammern $\{\dots\}$ geschrieben
- Die Reihenfolge der Elemente ist egal: $\{1; 2; 3\} = \{1; 3; 2\} = \{3; 2; 1\}$
- Alle Objekte müssen unterschiedlich sein. Mengen wie $\{1; 1; 2\}$ sind „verboten“.

Einleitung

Elementbeziehung (1)

Um zu sagen, dass ein Objekt ein Element einer Menge ist, benutzt man das \in -Symbol:

$$1 \in \{1; 2; 3\}, \quad 0 \notin \{1; 2; 3\}, \quad 0 \in \{0\}$$

Vorsicht: Man muss Elemente und Mengen unterscheiden. Es gilt $\frac{1}{2} \neq \left\{\frac{1}{2}\right\}$, aber $\frac{1}{2} \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Die Menge, die kein Objekt enthält, nennt man **leere Menge** und schreibt

$$\emptyset = \{\}$$

Da sie keine Elemente hat, kann man schreiben

$$-1 \notin \emptyset, \quad a \notin \emptyset, \quad 2,13 \notin \emptyset, \quad \text{usw. usw.}$$

Sie entspricht auch nicht der Null oder enthält sie, d.h.

$$\emptyset \neq \{0\}, \quad 0 \notin \emptyset.$$

Es lassen sich auch **Mengen von Mengen** bilden, zum Beispiel

$$M = \{1; 2; \{3; 4\}\}$$

Diese Menge hat drei Elemente: Die zwei Zahlen 1 und 2 und die Menge bestehend aus 3 und 4. Man kann sagen

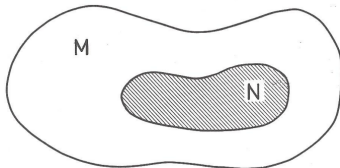
$$1 \in M, 2 \in M, \{3; 4\} \in M, \text{ aber z.B. } 3 \notin M, \{3\} \notin M.$$

Eine andere Menge, die dagegen alle obigen Objekte enthält, könnte lauten

$$N = \{1; 2; 3; \{3\}; \{3; 4\}\}$$

Die Menge N hat 5 Elemente, die alle wohlunterschieden sind.

Wenn M und N Mengen sind und jedes Element von N auch ein Element von M ist, nennt man N eine Teilmenge (oder Untermenge) von M .



Man schreibt dann $N \subset M$, d.h. für alle $n \in N$ gilt auch $n \in M$.

Beispiele

- $\{1; 2\} \subset \{1; 2; 3\}$, aber $\{1; 2; 3\} \not\subset \{1; 2\}$
- $\{a; b; c\} \subseteq \{a; b; c\}$ (Das " \subseteq "-Symbol erlaubt auch die Gleichheit)
- $\{1\} \subset \{1; \{5\}\}$
- $\{\{5\}\} \subset \{1; \{5\}\}$
- $\{\} \subset \{1; a; 2; b; 3\}$ (Die Menge \emptyset ist in jeder Menge enthalten)

Weitere Beispiele

- $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
- $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$

Beachte: Die Menge $\{\emptyset\}$ ist nicht leer, sondern *enthält die leere Menge*.

Die sämtlichen Teilmengen einer Menge M bilden ihre **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$. Sie umfasst die Menge aller Teilmengen von M .

▷ Beispiele

- $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a; b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a; b\}\}$
- $\mathcal{P}(\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0\}) = \{\emptyset, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{3}{4}\}, \{0\}, \{\frac{3}{4}, 0\}, \{\frac{1}{2}, 0\}, \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}, \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Ist eine Menge M abzählbar, so kann man angeben, wie viel Elemente sie besitzt. Diese Zahl (= die Anzahl der Elemente) nennt man die **Mächtigkeit** von M und schreibt

$$\#M \quad \text{oder} \quad |M|.$$

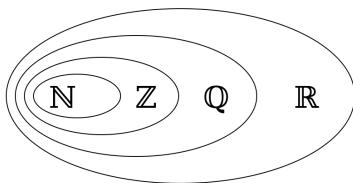
▷ Beispiele

- $\#\emptyset = 0$
- $\#\left\{\frac{1}{2}; 5\right\} = 2$
- $\#\{1; 2; \emptyset; \{1; 3\}\} = 4$
- $\#\{1; 2; 3; 4; \dots\} = \infty$

Das ∞ -Symbol zeigt an, dass die Menge unendlich viele Elemente hat.

Einleitung

Die Mengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}



- ➊ **Natürliche Zahlen:** $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* = \mathbb{N}_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots; 99; 100; \dots\}$
- ➋ **Natürliche Zahlen mit Null:** $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots; 99; 100; \dots\}$
- ➌ **Ganze Zahlen:** $\mathbb{Z} = \{\dots; -100; -99; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; 99; 100; \dots\}$
- ➍ **Rationale Zahlen:** $\mathbb{Q} = \{\dots; -\frac{2}{1}; -\frac{1}{1}; 0; \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{3}{1}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \dots\}$
- ➎ **Reelle Zahlen:** $\mathbb{R} = \{\dots; -\frac{7}{3}; \dots; 0; \dots; \sqrt{2}; \dots; 3; \dots; \pi; \dots; 10^{4096}; \dots\}$

Man hat folgende Teilmengenbeziehung:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Anmerkung: Die komplexen Zahlen \mathbb{C} werden im Vorkurs nicht behandelt.

Einleitung

Beschreibende Notation (1)

Alle vorigen Mengen sind in **aufzählender Notation** angegeben, d.h. die Elemente einer Menge wurden durch die Mengenklammern $\{\dots\}$ zu einer Menge zusammengefasst, z. B. $M = \{1; 2; 3\}$.

Diese Notation kommt schnell an ihre Grenzen, z.B. bei der Definition der rationalen Zahlen.

Daneben gibt es die **beschreibende Notation** mit Hilfe eines Prädikats. Die Menge

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

umfasst alle Elemente aus M , für die das Prädikat $P(x)$ gilt. Die Menge M nennt man die **Obermenge**.

▷ **Beispiel:** Die Menge aller rationalen Zahlen, die echt größer als 3 sind, lautet

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 3\}.$$

Für die Menge der ganzen Zahlen ist folgende Notation möglich:

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}\}$$

Weitere Beispiele

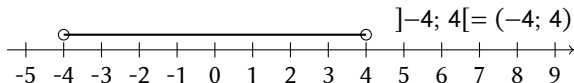
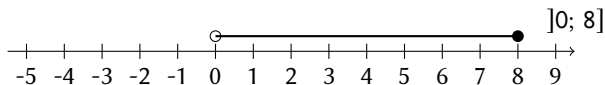
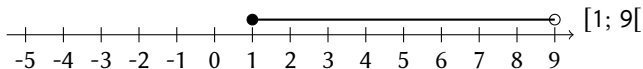
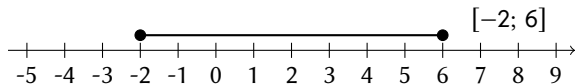
- 1 $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \cdot x = 4\} = \{-2; 2\}$
- 2 $\{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot x = 4\} = \{2\}$
- 3 $\{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 = 0\} = \emptyset$
- 4 $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 = 0\} = \{-1\}$
- 5 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \{-2; 2\} \text{ und } x > 0\} = \{2\}$
- 6 $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ und } x > 0\}$ - diese Menge lässt sich nicht sinnvoll in aufzählender Weise schreiben.
- 7 Die Potenzmenge: $\mathcal{P}(M) = \{U \mid U \subseteq M\}$

Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen, wie in Beispiel (6) der letzten Seite werden **Intervalle** genannt. Sie umfassen alle reellen Zahlen zwischen zwei Grenzen a und b .

Aus zwei reellen Zahlen $a < b$ lassen sich grundsätzlich vier verschiedene Intervalle bilden, für die es eine vereinfachte Schreibweise aus runden und eckigen Klammern gibt.

- ① $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =: (a; b)$ (offenes Intervall)
- ② $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} =: [a; b]$ (geschlossenes Intervall)
- ③ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =: (a; b]$ (halboffenes Intervall)
- ④ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} =: [a; b)$ (halboffenes Intervall)

Intervalle auf dem Zahlenstrahl



Merke: Intervalle sind zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R} .

Weitere Beispiele

- Das Intervall $[3; 5]$ enthält alle reellen zwischen 3 und 5. Dann sind folgende Aussagen wahr:

$$3 \in [3; 5], \quad 0 \in [-3; 5], \quad 5,01 \notin [1; 5], \quad \{1; 2; 3\} \subset [1; 5],$$

$$(3; 5) \subset [3; 5], \quad (2; 5) \neq [3; 5], \quad [1; 4] \neq \{1; 2; 3; 4\}$$

- Intervalle der Art $[3; 3]$, $[-2; -2]$, usw. enthalten nur eine Zahl.
- (Halb-)offene Intervalle wie $(1; 1)$, $(-3, 3]$, usw. sind leer.

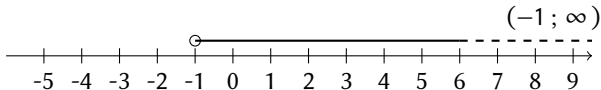
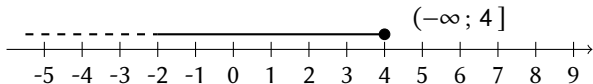
Einleitung

Intervalle (3)

Solange a und b reelle Zahlen sind, nennt man die Intervalle $(a; b)$, $[a; b]$, usw., **beschränkt**. Intervalle der Art

$$(-\infty; 4] \quad \text{oder} \quad (-1; \infty)$$

heißen dagegen **unbeschränkt**.



Rechnen mit Mengen (Mengenoperationen)

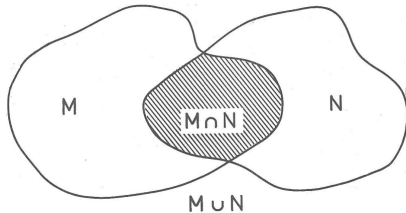
Mengenoperationen

Vereinigungsmenge

Die **Vereinigungsmenge** von M und N ist definiert durch

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\} \quad (\text{Lies: } M \text{ vereinigt mit } N)$$

Sie besteht aus allen Elementen, die *mindestens zu einer der Mengen* gehören.



Beispiele:

- $\{0\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}_0$
- $\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$ (und nicht $\{a; b; c; a; b; c\}$)
- $\{a; b; 2\} \cup \{1; 2; 3; \{2\}\} = \{a; b; 1; 2; 3; \{2\}\}$
- $\{\} \cup M = M$

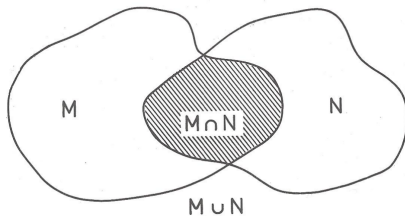
Mengenoperationen

Schnittmenge

Die **Schnittmenge** von M und N ist definiert durch

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\} \quad (\text{Lies: } M \text{ durchschnitten mit } N)$$

Sie umfasst die *gemeinsamen Elemente* von M und N , sofern es welche gibt.



Beispiele:

- $\{-2; 0; \frac{3}{2}\} \cap \{-2; 0\} = \{-2; 0\}$
- $\{a; b; 2\} \cap \{1; 2; 3; \{2\}\} = \{2\}$
- $\{\} \cap M = \emptyset$

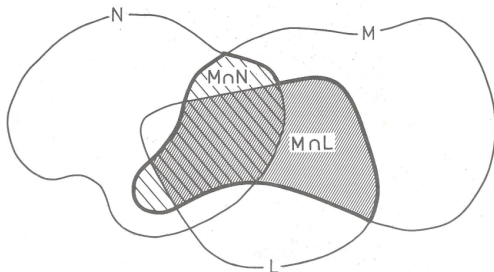
Mengenoperationen

Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung

Man kann an dieser Stelle einige Aussagen über Durchschnitt und Vereinigung zusammenstellen.

L , M und N seien Mengen. Dann gilt:

- 1 $M \cap N \subset M$, $M \subset M \cup N$
- 2 $M \cap N = N \cap M$, $M \cup N = N \cup M$ (Kommutativgesetze)
- 3 $M \cap (N \cap L) = (M \cap N) \cap L$,
 $M \cup (N \cup L) = (M \cup N) \cup L$. (Assoziativgesetze)
- 4 $M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$,
 $M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$. (Distributivgesetze)



Mengenoperationen

Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung

Analog zur „Punkt- vor Strichrechnung“ hat der Durchschnitt den Vorrang vor Vereinigung. Man rechnet mit Zahlen beispielsweise

$$2 \cdot 5 + 3 = 10 + 3 = 13.$$

Beim Rechnen mit Mengen bilden wir den Mengendurchschnitt zuerst, z.B.

$$\{1; 2\} \cap \{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}.$$

Wenn man die Vereinigung zuerst bilden möchte, liefert die Rechnung ein anderes Ergebnis

$$\{1; 2\} \cap (\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\}) = \{1; 2\} \cap \{1; 2; 3; 4\} = \{1; 2\}.$$

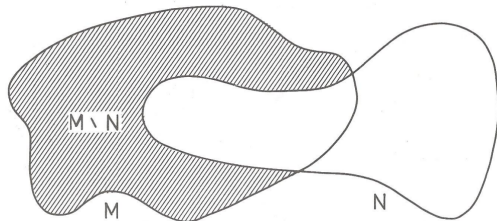
Mengenoperationen

Differenzmenge (1)

Die **Differenz** von zwei Mengen M und N ist definiert als

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\} \quad (\text{Lies: } M \text{ ohne } N)$$

Die Differenz enthält alle Elemente von M , die nicht in N sind, sofern es welche gibt.



▷ Beispiele:

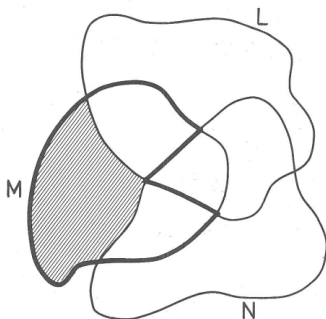
- $\{a; b; \{1\}; 2\} \setminus \{1; 2; 3; \{2\}\} = \{a; b; \{1\}\}$
- $M \setminus \emptyset = M$

Mengenoperationen

Differenzmenge (2)

L , M und N seien Mengen. Dann gilt:

- 1 $M \setminus N \subset M$
- 2 $(M \setminus N) \cap N = \emptyset$
- 3 $(M \setminus N) \cup N = M \cup N$
- 4 $M \setminus (N \cap L) = (M \setminus N) \cup (M \setminus L)$
- 5 $M \setminus (N \cup L) = (M \setminus N) \cap (M \setminus L)$

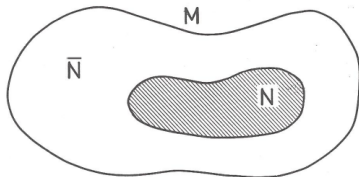


Mengenoperationen

Komplement einer Menge

Das Komplement einer Menge N mit $N \subset M$ ist definiert als

$$\overline{N} = \{x \in M \mid x \notin N\}$$



Die Bildung des Komplements ist abhängig von der betrachteten Obermenge (oder Grundmenge).

▷ Beispiele:

- Sei $M = \{1; 2; 3; 4\}$, dann ist $\overline{\{1; 3\}} = \{2; 4\}$ bzgl. der Obermenge M , aber $\overline{\{1; 3\}} = \{2; 4; 5; 6; 7; \dots; 18; 19; \dots\}$ bzgl. \mathbb{N} .
- Sei $N \subset M$, dann ist $\overline{N} \cup N = M$
- Das Komplement des Intervalls $(-1; 1)$ ist $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$. Hier ist die Obermenge typischerweise immer \mathbb{R} .

De-morgansche Gesetze

Für die Komplementbildung von Schnitt- und Vereinigungsmengen gibt es folgende Rechenregeln, die sog. de-morganschen Regeln (nach Augustus De Morgan 1806–1871).

Seien A, B zwei Mengen bzgl. derselben Grundmenge M . Dann gilt

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

▷ **Beispiel:**

$$\overline{[-1; \frac{1}{2}) \cap [0; 3)} = \overline{[-1; \frac{1}{2}) \cup [0; 3)} = \overline{[-1; 3)} = (-\infty; -1) \cup [3; \infty)$$