IuM-Brückenkurs Mathematik

K. Viertel

Fachbereich IuM
Hochschule Bielefeld

WS 2025/26

Themenbereich

Lineare Gleichungssysteme und Polynome

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Ein lineares Gleichungssystem (kurz LGS) ist eine Menge linearer Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten, die alle *gleichzeitig* erfüllt sein *sollen*.

Allgemein lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten immer in die folgende Form bringen:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\cdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Lineare Gleichungssysteme werden homogen genannt, wenn alle $b_1, \dots, b_m$ gleich 0 sind, andernfalls inhomogen. Homogene Gleichungssysteme besitzen stets mindestens die Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Bei inhomogenen Gleichungssystemen kann dagegen der Fall eintreten, dass überhaupt keine Lösung existiert.

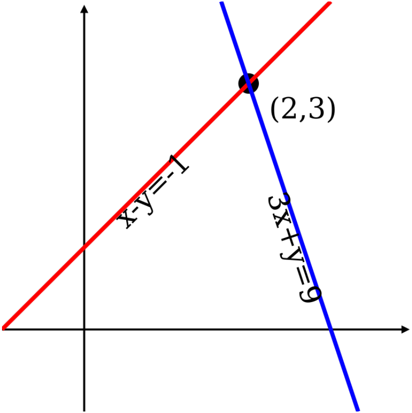
▷ **Beispiel**: a sei das Alter von Person A und b das Alter von Person B. Beide Personen sind zusammen 46 Jahre alt und B ist 3-mal so alt wie A.

Zum Finden der Größen a, b kann man folgendes LGS aufstellen:

$$\begin{cases} \quad a + b = 46 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$$

Hierbei spricht man von einem $(2, 2)$-System (zwei Gleichungen, zwei Unbekannte).

Graphische Darstellung (1)



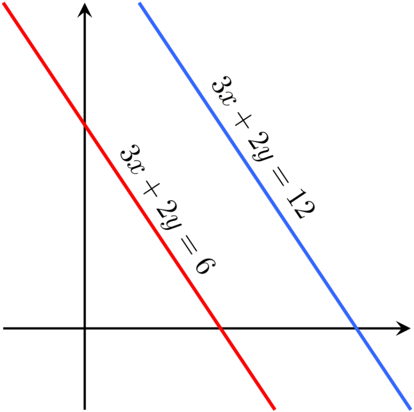
(2, 2)-Systeme können durch Geraden in der Ebene veranschaulicht werden.

Ein Schnittpunkt (oder das Fehlen desselben) beschreibt gleichzeitig die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

Hier am Beispiel des Systems

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + y = 9 \end{cases} .$$

Graphische Darstellung (2)



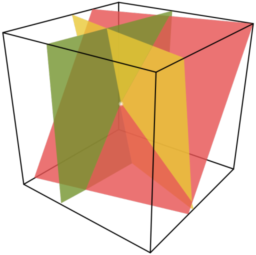
Systeme wie das folgende haben eine leere Lösungsmenge.

Entsprechend haben die Geraden keinen Schnittpunkt.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}.$$

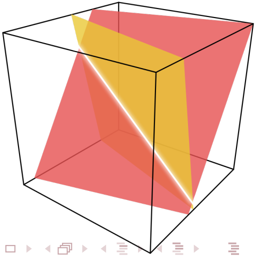
Graphische Darstellung (3)

Ein lineares System in drei Variablen bestimmt eine Menge von Ebenen. Der Schnittpunkt (sofern er existiert) ist die Lösung.



Ein (2,3)-System beschreibt dagegen nur zwei Ebenen im Raum, die ggf. eine Schnittgerade bilden. In diesem Fall ist

$$\# \mathbb{L} = \infty.$$



Für ein lineares Gleichungssystem gilt immer einer der folgenden drei Fälle:

1. es ist eindeutig lösbar.

   ▷ **Beispiel**: Das System $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(-3;2)\}$

2. es ist nicht lösbar.

   ▷ **Beispiel**: Das System $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ hat keine Lösung: $\mathbb{L} = \emptyset$.

3. es hat unendlich viele Lösungen.

   ▷ **Beispiel**: Das System $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$ hat unendlich viele Lösungen:

$$\mathbb{L} = \{(0;0), (-1;2), (1;-2), \dots\} = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x \right\}$$

Im Vorkurs berechnen wir die Lösungen eines LGS entweder mit dem Einsetzungs- oder dem Gaußschen Eliminationsverfahren (→ siehe Vorlesung).

Beispiel für ein (3,3)-System

Wir suchen die Funktionsvorschrift für eine Parabel der Form $y = ax^2 + bx + c$ durch die folgenden Punkte

$$A(-1|12),\ B(2|15),\ C(5|-18)$$

Rechenweg: Wir setzen jeden Punkt in die allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$ ein und erhalten daraus ein System von Gleichungen.

$$\begin{aligned} 12 &= a \cdot (-1)^2 - b + c \\ 15 &= a \cdot 2^2 + 2b + c \\ -18 &= a \cdot 5^2 + 5b + c \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{cases} a - b + c = 12 \\ 4a + 2b + c = 15 \\ 25a + 5b + c = -18 \end{cases}$$

Definition

Ein **Polynom** ist ein Term, der sich als Summe von Vielfachen von Potenzen einer Variablen darstellt, d.h.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

oder mit dem Summenzeichen geschrieben

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Die Exponenten k der Potenzen sind stets natürliche Zahlen und die Summe ist immer endlich. Als **Grad des Polynoms** wird der höchste Exponent $k \in \{0, \ldots, n\}$ genannt, für den der Vorfaktor a_k nicht Null ist.

In der Ingenieurmathematik gibt es einige wichtige spezielle Polynome (z.B. charakteristisches Polynom, Lagrange-Polynom).

Beispiele für Polynome

1. $m \cdot x + b$ ist die allg. Geradenfunktion und ein Polynom von Grad 1.
2. $(x-1)^2$ ist eine 1 nach rechts verschobene Normalparabel und ein Polynom von Grad 2
3. $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$ ist eine Näherung der natürlichen Exponentialfunktion und ein Polynom von Grad 4.
4. a_0 sind formal auch Polynome (von Grad 0).

Beispiele für Terme, die keine Polynome sind

1. $\sqrt{x^2 + x + 1}$ oder $x^{\frac{2}{3}}$. Lediglich der Radikand ist ein Polynom
2. x^{-7} oder $\frac{1}{x}$. Hier sind nur jeweils Zähler und Nenner Polynome, aber nicht der Quotient.

Die **Polynomdivision** ist ein Rechenverfahren, bei dem ein Polynom (hier $p(x)$) durch ein anderes (hier $q(x)$) dividiert wird. Das Ergebnis $p(x)\ :\ q(x)$ ist wieder ein Polynom mit evtl. Rest. D.h.

$$p(x)\ :\ q(x) = s(x)\ \text{ Rest }\ r(x),$$

wobei $s(x), r(x)$ auch wieder Polynome sind und durch das Verfahren bestimmt werden sollen. Man kann auch schreiben

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x),$$

Das Verfahren verläuft ähnlich zur üblichen schriftlichen Division von Zahlen mit Rest.

Anwendungsfälle in der Ingenieurmathematik:

- Das Lösen von Polynomgleichungen höheren Grades, wobei bereits eine Lösung (Nullstelle) bekannt ist.
- Bei der Bestimmung der Näherungskurven einer rationalen Funktion. Bei
- Für die Integration rationaler Funktionen

Manche Polynome lassen sich als Produkt „einfacherer” Polynome kleineren Grades schreiben. Beispielsweise ergibt sich

$$x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x + 2)(x - 2)$$

Die Faktoren $x, (x + 2), (x - 2)$ lassen sich nicht weiter zerlegen. Man sagt, sie sind irreduzibel.

Bis auf Weiteres sagen wir, dass die Faktorisierung auf die reellen Zahlen beschränkt sein soll. $x^2 + 1$ ist demnach irreduzibel.

Allgemein: Hat ein Polynom $p(x)$ eine Nullstelle $x = a$, so ist es ohne Rest durch $(x - a)$ teilbar, d.h.

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a)$$

mit einem Polynom $q(x)$, dessen Grad um eins kleiner ist und das z.B. durch Polynomdivision berechnet werden kann.

Hat $q(x)$ wieder eine Nullstelle $x = b$, dann ist $q(x)$ wiederrum teilbar durch $(x - b)$, d.h.

$$p(x) = r(x) \cdot (x - b) \cdot (x - a)$$

$\boxed{q(x) \textbf{ ist ein Teiler von } p(x)}$:

▷ Beispiel: Wir berechnen $(2x^3 + 6x^2 - 8) : (x - 1)$

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad 2x^3 + 6x^2 \qquad\quad - 8 \big) : \big(x - 1 \big) = 2x^2 + 8x + 8 \\
\underline{-\,2x^3 + 2x^2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
8x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
\underline{-\,8x^2 + 8x} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
8x - 8 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\underline{-\,8x + 8} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
$$

Hier ist der Linearfaktor $(x - 1)$ ein Teiler von $p(x)$, d.h. $x = 1$ ist eine Nullstelle von $p(x)$. In diesem Fall ist die Division ohne Rest. Es gilt

$$2x^3 + 6x^2 - 8 = (x - 1) \cdot (2x^2 + 8x + 8)$$

$\boxed{q(x) \textbf{ ist kein Teiler von } p(x)}$:

▷ Beispiel: Wir berechnen $(2x^3 + 4x^2 - 6x) : (x + 1)$

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad 2x^3 + 4x^2 - 6x\big) & : \big(x+1\big) = 2x^2 + 2x - 8 + \dfrac{8}{x+1} \\
-\,2x^3 - 2x^2 \phantom{{}-6x} & \\
\hline
2x^2 - 6x & \\
-\,2x^2 - 2x & \\
\hline
-\,8x \phantom{{}+8} & \\
8x + 8 & \\
\hline
8 &
\end{array}
$$

Der Linearfaktor $(x + 1)$ ist kein Teiler und $x = -1$ somit keine Nullstelle von $p(x)$. Die Division liefert den Rest 8 und man kann schreiben

$$2x^3 + 4x^2 - 6x = (x + 1) \cdot (2x^2 + 2x - 8) + 8$$

Beispiel

Man finde sämtliche reellen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$$

Rechenweg: Die erste Nullstelle muss geraten werden: $x = -1$ ist eine Nullstelle. Die Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{l}
\left(x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \right) : \left(x + 1 \right) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \\
\underline{-x^4 - x^3} \\
\quad 3x^3 - x^2 \\
\quad \underline{-3x^3 - 3x^2} \\
\qquad -4x^2 - 16x \\
\qquad \underline{4x^2 + 4x} \\
\qquad\quad -12x - 12 \\
\qquad\quad \underline{12x + 12} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Beispiel

Man finde sämtliche reellen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$$

Rechenweg: Wir setzen die Faktorisierung mit dem Polynom $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ fort. Erneutes Raten einer Nullstelle liefert $x = 2$. Polynomdivision mit $(x - 2)$:

$$\begin{array}{rrrrl}
(\;\; x^3 & +3x^2 & -4x & -12) & : (x-2) = x^2 + 5x + 6 \\
-x^3 & +2x^2 & & & \\
\hline
 & 5x^2 & -4x & & \\
 & -5x^2 & +10x & & \\
\hline
 & & 6x & -12 & \\
 & & -6x & +12 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Beispiel

Man finde sämtliche reellen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$$

Rechenweg: Das Polynom $x^2 + 5x + 6$ können wir mit der p,q-Formel faktorisieren:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Insgesamt hat man jetzt

$$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = (x + 2)(x + 3)(x - 2)(x + 1)$$

Die Nullstellen von $p(x)$ lauten also $x = -2$, $x = -3$, $x = 2$, $x = -1$.

Beispiel

Man finde sämtliche reellen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$$

Rechenweg: Durch Raten findet man die Nullstelle $x = 1$. Polynomdivison mit $(x - 1)$ liefert

$$\begin{array}{rl} \big(\quad 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \big) & : \big(x - 1\big) = 2x^2 + 2 \\ \underline{-\, 2x^3 + 2x^2 \qquad\quad\;} & \\ 2x - 2 & \\ \underline{-\, 2x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Das Ergebnispolynom $2x^2 + 2$ ist irreduzibel. Es gibt also nur eine Nullstelle und die Faktorisierung von $p(x)$ lautet

$$p(x) = (x - 1)(2x^2 + 2).$$

Umgekehrt können wir die Faktorisierung zum Aufstellen eines Polynoms nutzen, wenn die Nullstellen bekannt sind.

Wie lautet ein Polynom, dass eine doppelte Nullstelle bei $x = 2$ und je eine Nullstelle bei $x = 1$ und $x = -\frac{1}{4}$ hat? Er soll darüberhinaus keine weiteren Nullstellen haben.

Antwort:

$$p(x) = (x-2)^2(x-1)(x+\tfrac{1}{4}) \quad \text{oder}$$
$$q(x) = 10\,(x-2)^2(x-1)(x+\tfrac{1}{4})(x^2+1) \quad \text{oder...}$$