

Aufgabenblatt Winkelfunktionen

IuM-Brückenkurs Mathematik

Aufgabe 1. Füllen Sie folgende Tabelle aus, in dem Sie die fehlenden Funktionswerte bestimmen. Versuchen Sie exakte Werte statt gerundete Dezimalzahlen anzugeben. Benutzen Sie dafür rechtwinklige Dreiecke im Einheitskreis oder im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlängen 1.

Hinweis: $\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$ und $\cot(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}$.

ϕ (Gradmaß)	ϕ (Bogenmaß)	$\sin(\phi)$	$\cos(\phi)$	$\tan(\phi)$	$\cot(\phi)$
0°	0				
30°	$\frac{1}{6}\pi$				
45°	$\frac{1}{4}\pi$				
60°	$\frac{1}{3}\pi$				
90°	$\frac{1}{2}\pi$				
180°	π				
270°	$\frac{3}{2}\pi$				

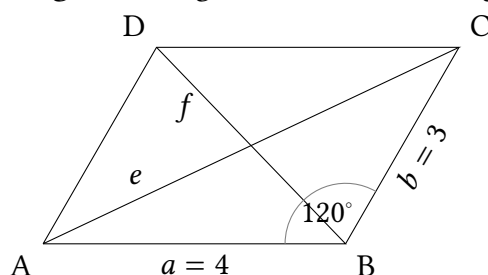
Lösung:

ϕ (Winkelgrad)	ϕ (Radiant)	$\sin(\phi)$	$\cos(\phi)$	$\tan(\phi)$	$\cot(\phi)$
0°	0	0	1	0	nicht definiert
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	nicht definiert	0
180°	π	0	-1	0	nicht definiert
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	nicht definiert	0

Aufgabe 2. In einem rechtwinkligen Dreieck hat man die Katheten $a = 9$ und $b = 12$. Berechnen Sie die spitzen Winkel α und β sowie die Länge der Hypotenuse.

Lösung: $c = 15$; $\alpha \approx 36,87^\circ$; $\beta \approx 53,13^\circ$.

Aufgabe 3. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Ermitteln Sie die Diagonalen e und f .

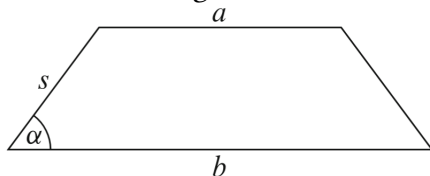


Lösung: Man wende in den Dreiecken ABD und ABC den Cosinussatz an. $e = 6,08$ und $f = 3,61$.

Aufgabe 4. Die Seite a eines Dreiecks hat die Länge 3, die Seite b die Länge 4. Zwischen beiden Seiten ist ein Winkel von 30° . Bestimmen Sie die Länge der Seite c . Ist diese Länge durch die Angaben eindeutig festgelegt?

Lösung: Der Cosinussatz liefert $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(30^\circ)} \approx 2,05$.

Aufgabe 5. Die beiden parallelen Seiten a und b eines gleichschenkligen Trapezes sind $a = 8$ und $b = 14$ lang. Die Höhe h beträgt 4.



Wie lang ist die Seite s und wie groß ist der Winkel α ?

Lösung: $s = 5$ und $\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$, also $\alpha \approx 53,1^\circ$.

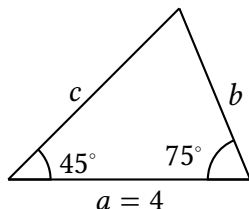
Aufgabe 6. Die Seitenlängen eines Dreiecks 4 und 5. Gegenüber der Seite mit der Länge 5 ist ein Winkel von 30° . Bestimmen Sie den Winkel gegenüber der Seite mit der Länge 4. Ist dieser Winkel durch die Angaben eindeutig festgelegt?

Lösung: Nach dem Sinussatz ist der gesuchte Winkel $\arcsin\left(\frac{4}{5} \sin(30^\circ)\right) = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) \approx 23,6^\circ$. Das ist eindeutig, weil die kürzere Seite gegenüberliegt.

Aufgabe 7. Die Seite c eines Dreiecks hat die Länge 5. Diese Seite bildet einen Winkel von 45° mit der Seite a . Die Seite b hat die Länge 4. Bestimmen Sie den Winkel gegenüber der Seite c . Ist dieser Winkel durch die Angaben eindeutig festgelegt?

Lösung: Der Sinussatz liefert für den gesuchten Winkel γ die Gleichung $\sin(\gamma)/c = \sin(45^\circ)/b$. Der Winkel γ ist hier nicht eindeutig bestimmt. Die erste Möglichkeit ist $\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{5}{4} \sin(45^\circ)\right) \approx 62,1^\circ$, die zweite ist $\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \approx 117,9^\circ$.

Aufgabe 8. Die Seite a eines Dreiecks hat die Länge 4. Diese Seite bildet einen Winkel von 75° mit der Seite b und einen Winkel von 45° mit der Seite c des Dreiecks.



- Bestimmen Sie die Länge der Seite b . Ist diese Länge durch die Angaben eindeutig festgelegt?
- Bestimmen Sie den Radius r des Inkreises des Dreiecks

Lösung:

- Der Sinussatz liefert $\frac{\sin(45^\circ)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$, wobei $\alpha = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$. Damit ist $b = 4 \cdot \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(60^\circ)} \approx 3,3$. Das ist eindeutig, weil alle Winkel bekannt sind.
- Der Mittelpunkt des Innenkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Betrachten wir das Dreieck, das von der Seite a und den Winkelhalbierenden w_β und w_γ gebildet wird. Dessen Höhe auf die Seite a ist der gesuchte Radius r . Sei a_1 das von der Höhe abgeteilte Stück von a am Winkel β und a_2 das von der Höhe abgeteilte Stück von a am Winkel γ . Dann gilt für die Höhe und damit den Radius: $r = \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right) \cdot a_1 = \tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right) \cdot a_2$. Außerdem muss $a_1 + a_2 = 4$ sein. Also ist

$$r = \frac{4 \cdot \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right) \tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right)}{\tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right) + \tan\left(\frac{75^\circ}{2}\right)} \approx 1,1.$$

Aufgabe 9. Berechnen Sie die dritte Dreiecksseite.

(a) $a = 10 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}, \gamma = 60^\circ$

(b) $a = 3 \text{ m}, c = 5 \text{ m}, \beta = 50^\circ$

(c) $a = \sqrt{2} \text{ dm}, b = 2 \text{ dm}, \gamma = 45^\circ$

Lösung:

(a) $c = \sqrt{75} \text{ cm}$

(b) $b \approx 3,8362 \text{ m}$

(c) $c = \sqrt{2} \text{ dm}$

Aufgabe 10. Berechnen Sie für das Dreieck ABC die jeweils fehlenden Seiten und Winkel.

(a) $a = 15$

$b = 8,7$

$\gamma = 66,4^\circ$

(b) $b = 9,4$

$c = 6,8$

$\alpha = 34,6^\circ$

(c) $a = 132$

$b = 187$

$c = 89$

Lösung:

(a) Mit dem Cosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$ bekommt man $c \approx 14$. Weiter geht es mit den anderen Varianten des Cosinussatzes:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha), \text{ d.h. } \alpha = 78,95^\circ,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta), \text{ d.h. } \beta = 34,7^\circ$$

(b) Der Cosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$ liefert $a \approx 5,42$ und mit dem Sinussatz erhält man

$$\sin \beta = 9,4 \cdot \frac{\sin(34,6^\circ)}{5,42}, \text{ d.h. } \beta \in \{80,04^\circ; 99,96^\circ\}$$

und

$$\sin \gamma = 6,8 \cdot \frac{\sin(34,6^\circ)}{5,42}, \text{ d.h. } \gamma \in \{45,43^\circ; 134,57^\circ\}.$$

Damit die Winkelsumme im Dreieck erhalten bleibt, nehme man entweder jeweils den Arkussinus oder seinen Komplementärwinkel. Hier sind es $\beta = 99,96^\circ$ und $\gamma = 45,43^\circ$

(c) $\alpha = 40,1^\circ, \beta = 114,2^\circ$ und $\gamma = 25,7^\circ$.